

第二章 数字信号处理基础

- 2.1 傅里叶变换及其意义
- 2.2 傅里叶变换的性质
- 2.3 频域分析和谱图表示
- 2.4 频域分辨率
- 2.5 数字滤波器的设计和实现

2.1 傅里叶变换及其意义.....

2.1.1 傅里叶变换的意义及各种变换对

2.1.2 离散傅里叶变换

2.1 傅里叶变换及其意义

傅里叶分析方法的建立有过一段漫长的历史，涉及到很多人的工作和不同物理现象的研究。

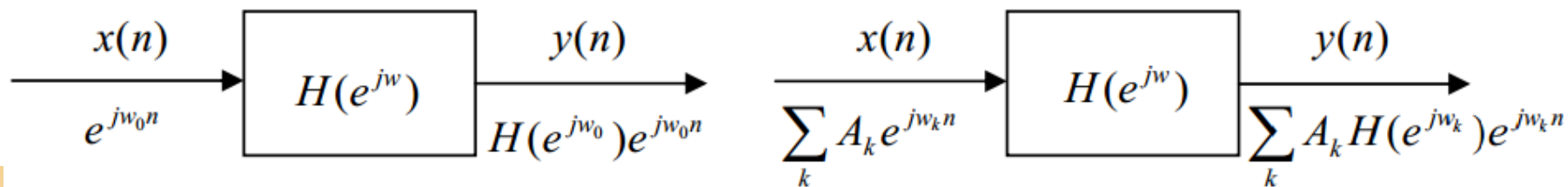
主要包括欧拉、伯努利、傅里叶、狄里赫利等学者的努力完善下，建立了傅里叶分析方法，他们主要是集中在连续时间信号的分析问题上。

对于离散时间信号的傅立叶分析方法却有着不同的发展过程，用于处理离散数据以产生数值近似的有关内插、积分和微分等方面的公式早在17世纪的牛顿时代就被研究过，从事时间序列的研究曾吸引了18、19世纪包括高斯在内的许多著名科学家，从而为离散傅里叶变换提供了数学基础。

2.1.1 傅里叶变换的意义及各种变换对

如果一个LTI（线性时不变）系统的输入可以表示为周期复指数的线性组合，则输出也一定能表示成这种形式，并且输出线性组合中的加权系数与输入中对应的系数有关。



如下图所示， $x(n)$ 表示输入或者激励， $y(n)$ 表示系统输出或者响应， $H(e^{j\omega})$ 表示系统单位脉冲响应 $h(n)$ 的频率响应。



成谐波关系的复指数信号的响应

2.1.1 傅里叶变换的意义及各种变换对

各种信号的傅里叶级数和傅里叶变换对

	傅立叶级数	傅立叶变换
时域  频域	$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{j\omega_0 kt}$ <p>时域是连续周期的</p>	$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} dt$ <p>时域是连续非周期的</p>
	$a_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} \tilde{x}(t) e^{-j\omega_0 kt} dt$ <p>频域是离散非周期的</p>	$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$ <p>频域是连续非周期的</p>
时域  频域	$\tilde{x}(n) = \sum_{k=(N)} \tilde{a}_k e^{jk(2\pi/N)n}$ <p>时域是离散周期的</p>	$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$ <p>时域是离散非周期的</p>
	$\tilde{a}_k = \frac{1}{N} \sum_{n=(N)} \tilde{x}(n) e^{-jk(2\pi/N)n}$ <p>频域是离散周期的</p>	$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-j\omega n}$ <p>频域是连续周期的</p>

2.1.2 离散傅里叶变换.....

离散时间傅立叶变换 (DTFT) 为: $X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-j\omega n}$

时域是离散、非周期的, 但频域是连续、周期的。对连续变量 ω 均匀采样, 也就是对单位圆进行 N 等分, 取一个周期的

结果即得: $X(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \quad (0 \leq k \leq N-1)$

离散傅立叶变换 (DFT) 变换对:

$$X(k) = \text{DFT}[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}, (0 \leq k \leq N-1)$$

$$x(n) = \text{IDFT}[X(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)e^{j\frac{2\pi}{N}nk}, (0 \leq n \leq N-1)$$

2.1.2 离散傅里叶变换.....

【例2-1】 试计算常用信号 $R_N(n)$ 和 $\cos(\frac{4\pi}{N}n)R_N(n)$ 的 N 点DFT。

解： $R_N(n)$ 是一个矩形窗函数，滤波器中经常会用到。

$$R_N(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$
$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$$
$$X_1(k) = \sum_{n=0}^{N-1} R_N(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \left\{ \begin{array}{l} N, \quad k=0 \\ \frac{1-e^{-j\frac{2\pi}{N}kN}}{1-e^{-j\frac{2\pi}{N}k}} = 0, \quad k=1, 2, \dots, N-1 \end{array} \right\}$$
$$= N\delta(k), 0 \leq k \leq N-1$$

2.1.2 离散傅里叶变换.....

$$X_2(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \cos\left(\frac{4\pi}{N}n\right) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \sum_{n=0}^{N-1} \left(\frac{e^{-j\frac{4\pi}{N}n} + e^{j\frac{4\pi}{N}n}}{2}\right) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi}{N}(k+2)n} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi}{N}(k-2)n}$$

同理:

$$X_2(k) = \frac{1}{2} N \delta(k-2) + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi}{N}(k+2-N)n}$$

$$= \frac{N}{2} [\delta(k-2) + \delta(k-(N-2))], \quad 0 \leq k \leq N-1$$

$$\sin\left(\frac{4\pi}{N}n\right) R_N(n) ? = \frac{N}{2j} [\delta(k-2) - \delta(k-(N-2))], \quad 0 \leq k \leq N-1$$

2.1.2 离散傅里叶变换.....

- 为了表示方便，一般用符号 W_N 来表示正交序列集中的基 $e^{-j\frac{2\pi}{N}}$ ，即 $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$ ，因此离散傅里叶变换对也可表示如下：

$$X(k) = \text{DFT}[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{kn}, (0 \leq k \leq N-1)$$

$$x(n) = \text{IDFT}[X(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)W_N^{-kn}, (0 \leq n \leq N-1)$$

2.1.2 离散傅里叶变换

- W_N 有如下性质:

周期性: $W_N^n = W_N^{(n+rN)}$

共轭对称性: $W_N^n = (W_N^{-n})^*$

可约性: $W_N^{rn} = W_{N/r}^n$ 或者 $W_{rN}^{rn} = W_N^n$

2.2 傅里叶变换的性质.....

● 1、线性

$$\text{DFT}[ax(n) + by(n)] = aX(k) + bY(k), (0 \leq k \leq N-1)$$

● 2、时间翻转特性

$$\text{DFT}[x(N-n)] = X(N-k), (0 \leq k \leq N-1)$$

$$\begin{aligned} \text{证明: DFT}[x(N-n)] &= \sum_{n=0}^{N-1} x(N-n)W_N^{kn} = \sum_{m=1}^N x(m)W_N^{k(N-m)} \\ &= \sum_{m=1}^N x(m)W_N^{k(N-m)+(m-k)N} = \sum_{m=1}^N x(m)W_N^{m(N-k)} \end{aligned}$$

2.2 傅里叶变换的性质.....

● 3、序列的循环移位

$$f(n) = x((n+m))_N R_N(n)$$

先将 $x(n)$ 以 N 为周期进行周期性延拓，得到 $\tilde{x}(n)$ ，然后再进行移位，得到 $\tilde{x}(n+m) = x((n+m))_N$ ，最后取主值序列，得到的 $f(n)$ 仍然是一个 N 点长的序列。循环移位的

$$\begin{aligned} \mathbf{DFT: } F(k) &= \text{DFT}[f(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x((n+m))_N W_N^{nk} R_N(n) \\ &= R_N(k) \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n+m) W_N^{nk} = R_N(k) \text{DFT}[\tilde{x}(n+m)] \\ &= R_N(k) W_N^{-mk} \tilde{X}(k) = W_N^{-mk} X(k) \end{aligned}$$

2.2 傅里叶变换的性质.....

因此，序列循环移位后的DFT为：

$$F(k) = W_N^{-mk} X(k)$$

序列的循环移位相当于频域的相移，根据对偶特性，则频域的循环移位对应时域的调制：

$$W_N^{mn} x(n) = IDFT[X((k+m))_N R_N(k)]$$

2.2 傅里叶变换的性质

4、循环卷积

时域卷积和频域的关系如下：

$$F(k) = X(k)Y(k)$$

则有： $f(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m)y((n-m))_N R_N(n)$

证明：

$$f(n) = IDFT[X(k)Y(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)Y(k)W_N^{-nk}$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\sum_{m=0}^{N-1} x(m)W_N^{mk} \right) Y(k)W_N^{-nk} = \sum_{m=0}^{N-1} x(m) \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} Y(k)W_N^{-(n-m)k}$$

$$= \sum_{m=0}^{N-1} x(m)y((n-m))_N R_N(n)$$

2.2 傅里叶变换的性质.....

根据对偶特性，频域循环卷积也对应时序相乘：

$$DFT[x(n)y(n)] = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} X(l)Y((k-l))_N R_N(k)$$

注意：时域循环卷积对应于DFT的相乘，序列线性卷积对应于DTFT的相乘：

$$\begin{cases} DFT[x(n) \otimes y(n)] = DFT[f(n)] = X(k)Y(k) \\ DTFT[x(n) * y(n)] = DTFT[e(n)] = X(e^{j\omega})Y(e^{j\omega}) \end{cases}$$

2.2 傅里叶变换的性质.....

- 【例2-2】设有两序列分别为：

$$x(n)=[1,1,1], \quad y(n)=[2,3,4,5]$$



求它们的线性卷积和5点循环卷积。（箭头所指位置表示 $n=0$ 的序列值，箭头右边依次是 $n=1,2,3,\dots$ ，左边依次是 $n=-1,-2,-3,\dots$ ）

解：线性卷积 $e(n) = \sum_{m=0}^2 x(m)y(n-m) = \sum_{m=0}^2 y(n-m)$ ，直接计算得到6点序列值：

$$e(0) = 2, \quad e(1) = 5, \quad e(2) = 9, \quad e(3) = 12, \quad e(4) = 9, \quad e(5) = 5$$

$$e(n) = [2, 5, 9, 12, 9, 5]$$



2.2 傅里叶变换的性质.....

循环卷积 $f(n) = \sum_{m=0}^4 x(m)y((n-m))_5 R_5(n)$ 可以用如下表格法进行计算:

$n \backslash x(m)$	$x(0)$ ↓ 1	$x(1)$ ↓ 1	$x(2)$ ↓ 1	$x(3)$ ↓ 0	$x(4)$ ↓ 0	$f(n)$
0	2/y(0)	0/y(-1+5)	5/y(-2+5)	4/y(-3+5)	3/y(-4+5)	7
1	3/y(1)	2/y(0)	0/y(-1+5)	5/y(-2+5)	4/y(-3+5)	5
2	4/y(2)	3/y(1)	2/y(0)	0/y(-1+5)	5/y(-2+5)	9
3	5/y(3)	4/y(2)	3/y(1)	2/y(0)	0/y(-1+5)	12
4	0/y(4)	5/y(3)	4/y(2)	3/y(1)	2/y(0)	9

$$f(n) = [7, 5, 9, 12, 9]$$



2.2 傅里叶变换的性质.....

为了理解线性卷积与循环卷积的关系，对线性卷积结果 $e(n)$ 以5为周期进行延拓，则有 $f_1(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e(n+5k)R_5(n)$

$$f_1(0) = e(0) + e(5) = 7, \quad f_1(1) = e(1) = 5,$$

$$f_1(2) = e(2) = 9, \quad f_1(3) = e(3) = 12, \quad f_1(4) = e(4) = 9$$

结果和5点循环卷积 $f(n)$ 相同，比较这两个卷积结果，发现只有两点（ $n=0$ ， $n=5$ ）发生了重叠，其它点结果都相同。

2.2 傅里叶变换的性质.....

- **【例2-3】** 利用快速傅里叶算法来求两个序列的循环卷积。

解：设 $x(n)$ 序列长为 M ， $y(n)$ 序列长为 N ，求它们的 L 点循环卷积可以从频域入手。它们对应的 L 点DFT分别为 $X(k)=\text{FFT}(x(n),L)$ ， $Y(k)=\text{FFT}(y(n),L)$ ，因此可以得到循环卷积为 $\text{IFFT}(X(k)Y(k))$ 。

2.2 傅里叶变换的性质.....

● 5、共轭对称性

一个信号实际上可以表示为奇对称部分和偶对称部分之和。

DFT中的复序列 $\dot{x}(n)$ 和频域 $X(k)$ 都是在 $0 \sim N-1$ 的范围内，因而它的对称是在主值范围内的对称，称为周期共轭对称 $\dot{x}_e(n)$ 和周期共轭反对称 $\dot{x}_o(n)$ ，关系如下：

$$\dot{x}_e(n) = \dot{x}_e^*(N-n) \longrightarrow 1+i=(1-i)^*$$

$$\dot{x}_o(n) = -\dot{x}_o^*(N-n) \longrightarrow 1+i=-(-1+i)^*$$

2.2 傅里叶变换的性质.....

- **【例2-4】** 已知 $X(k)=\text{DFT}[x(n)]$,若 $x(n)$ 是实序列,并且 $x(n)=x(N-n)$,试证明 $X(k)$ 也是实偶对称的。

证明: 由于 $x(n)$ 偶对称, 则 $x_o(n)=0$,因此 $\text{Im}[X(k)]=0$,即 $X(k)$ 为实序列。由于 $x(n)$ 是实序列, 则 $\text{Im}[x(n)]=0$,因而 $X_o(k)=0$,即 $X(k)$ 为偶对称。

2.2 傅里叶变换的性质.....

● 6、帕萨瓦尔 (Parseval) 定理

帕萨瓦尔 (Parseval) 定理是序列的能量定理，若 $X(k)=\text{DFT}(x(n))$ ，则有：

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2$$

证明：

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n)x^*(n) \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)W_N^{-nk} \right] x^*(n) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{N} X(k) \left[\sum_{n=0}^{N-1} W_N^{nk} x(n) \right]^* \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)[X(k)]^* = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2 \end{aligned}$$

2.2 傅里叶变换的性质.....

- 【例2-5】 已知 $x(n)=[1,2,3,4,5,6]$, $N=6$, 不求它的DFT结果, 来计算如下值: ↑

$$(1) X(0); (2) \sum_{k=0}^{N-1} X(k); (3) \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2$$

解: (1) 利用正变换公式 $X(k) = DFT[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{nk}$, 令 $k=0$, 得

$$X(0) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) = 21$$

(2) 利用反变换公式 $x(n) = IDFT[X(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)W_N^{-nk}$, 令 $n=0$, 得

$$\sum_{k=0}^{N-1} X(k) = Nx(0) = 6$$

(3) 利用帕塞伐尔定理 $\sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2$, 得

$$\sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2 = N(1+4+9+16+25+36) = 546$$

2.2 傅里叶变换的性质


DFT的性质表

时域	频域
$ax(n) + by(n)$	$aX(k) + bY(k)$
$x((n+m))_N R_N(n)$	$W_N^{-mk} X(k)$
$W_N^{mn} x(n)$	$X((k+m))_N R_N(k)$
$x(n) \otimes y(n)$	$X(k)Y(k)$
$x(n)y(n)$	$\frac{1}{N} X(k) \otimes Y(k)$
$x^*(n)$	$X^*(N-k)$
$x_e(n)$	$\text{Re}[X(k)]$
$x_o(n)$	$j \text{Im}[X(k)]$
$\text{Re}[x(n)]$	$X_e(k)$
$j \text{Im}[x(n)]$	$X_o(k)$
$\sum_{n=0}^{N-1} x(n) ^2$	$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) ^2$

2.3 频域分析和谱图表示.....

● 幅度谱

N 点长序列 $x(n)$ 的DFT结果为 $X(k)$ ，它是离散的复序列，表示如下：

$$X(k) = |X(k)|e^{j\angle X(k)}$$


代入傅里叶反变换公式为： $|X(k)|\cos(\angle X(k)) + j|X(k)|\sin(\angle X(k))$

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)| e^{j[\frac{2\pi}{N}kn + \angle X(k)]}$$

注：离散傅里叶变换的模 $|X(k)| = \sqrt{[\text{Re}(X(k))]^2 + [\text{Im}(X(k))]^2}$ 表示信号 $x(n)$ 在各复指数信号的频率分量的相对大小。例如，在 $k=0$ 附近小范围以外 $|X(k)|=0$ ，那么 $x(n)$ 所呈现的仅是相当低的频率。

2.3 频域分析和谱图表示.....

【例2-6】 已知信号 $x(n) = [\cos(\frac{3\pi}{16}n + \frac{\pi}{3}) + \frac{1}{2}\cos(\frac{5\pi}{16}n + \frac{\pi}{4})]R_N(n)$, N 取一个周期的的大小, 画出该信号的幅度谱并解释该图.

解: 信号的第一个成分的周期为:

$$\because N_1 = \frac{2\pi}{\frac{3\pi}{16}} m = \frac{32m}{3} \therefore N_1 = 32$$

取整!

信号的第二个成分的周期为:

$$\because N_2 = \frac{2\pi}{\frac{5\pi}{16}} m = \frac{32m}{5} \therefore N_2 = 32$$

取整!

因而 $x(n)$ 的周期为 $N=32$ 。

如果 N_1 和 N_2 不相等, 那么 $x(n)$ 的周期为多少?

答: $x(n)$ 的周期为 N_1 和 N_2 的最小公倍数!

2.3 频域分析和谱图表示.....

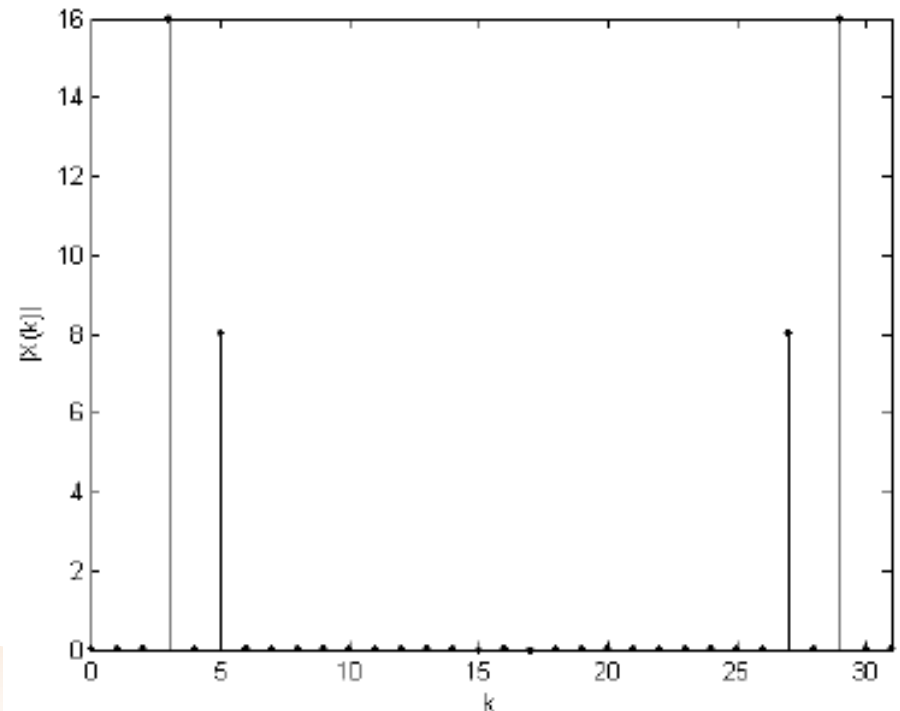
$$\begin{aligned}
 & \frac{e^{-j(\frac{3\pi}{16}n+\frac{\pi}{3})} + e^{j(\frac{3\pi}{16}n+\frac{\pi}{3})}}{2} \qquad \qquad \qquad \frac{e^{-j(\frac{5\pi}{16}n+\frac{\pi}{4})} + e^{j(\frac{5\pi}{16}n+\frac{\pi}{4})}}{2} \\
 X(k) &= \sum_{n=0}^{31} \left[\cos\left(\frac{3\pi}{16}n + \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{5\pi}{16}n + \frac{\pi}{4}\right) \right] e^{-j\frac{2\pi}{32}nk} \\
 &= \sum_{n=0}^{31} \left\{ \frac{1}{2} e^{j\frac{\pi}{3}} e^{-j\frac{2\pi}{32}n(k-3)} + \frac{1}{2} e^{-j\frac{\pi}{3}} e^{-j\frac{2\pi}{32}n(k+3)} + \frac{1}{4} e^{j\frac{\pi}{4}} e^{-j\frac{2\pi}{32}(k-5)} + \frac{1}{4} e^{-j\frac{\pi}{4}} e^{-j\frac{2\pi}{32}n(k+5)} \right\} \\
 &= 16e^{j\frac{\pi}{3}} \delta(k-3) + 16e^{-j\frac{\pi}{3}} \delta(k+3-N) + 8e^{j\frac{\pi}{4}} \delta(k-5) + 8e^{-j\frac{\pi}{4}} \delta(k+5-N) \\
 &= 16e^{j\frac{\pi}{3}} \delta(k-3) + 16e^{-j\frac{\pi}{3}} \delta(k-29) + 8e^{j\frac{\pi}{4}} \delta(k-5) + 8e^{-j\frac{\pi}{4}} \delta(k-27), 0 \leq k \leq N-1
 \end{aligned}$$

2.3 频域分析和谱图表示.....

幅度谱为:

$$|X(k)| = \begin{cases} 16 & k = 3, \text{ or } k = 29 \\ 8 & k = 5, \text{ or } k = 27 \\ 0 & \text{others} \end{cases}$$

因此信号的**幅度谱**如下图:



2.3 频域分析和谱图表示.....

由幅度谱可以看出信号只在 $k=3, 5, 27, 29$ 有大小，它代表的含义是信号所包含的各个复指数频率分量的大小，即只有四个复指数频率分量存在：

$$\omega_3 = \frac{2\pi}{N} 3 = \frac{3\pi}{16}, \quad \omega_5 = \frac{2\pi}{N} 5 = \frac{5\pi}{16}, \quad \omega_{27} = \frac{2\pi}{N} 27 = \frac{27\pi}{16}, \quad \omega_{29} = \frac{2\pi}{N} 29 = \frac{29\pi}{16}$$

$k=3, 29$ 的复指数分量大小是 $k=5, 27$ 的复指数分量的一倍。这些和信号的幅度、频率信息相符合，但是没有给出该信号的相位信息。由于幅度谱的偶对称性，往往只画出一半的幅度谱即可。

2.3 频域分析和谱图表示.....

● 相位谱

$\angle X(k)$ 表示相位角, $\angle X(k) = \arctan\left(\frac{\text{Im}[X(k)]}{\text{Re}[X(k)]}\right)$, 它的大小不会影响各复指数频率分量的大小, 但能够提供**初始相位信息**。 $\angle X(k)$ 对信号的性质有着显著的影响, 因此一般包含了信号的大量信息, 用**相同的幅度谱和不同的相位谱得到的信号完全不同**。

如果序列 $x(n)$ 是实序列, $\angle X(k) = -\angle X(N-k)$, 即相位谱是奇对称。

2.3 频域分析和谱图表示.....

【例2-7】画出例2-6的相位谱并解释该图

解：因为

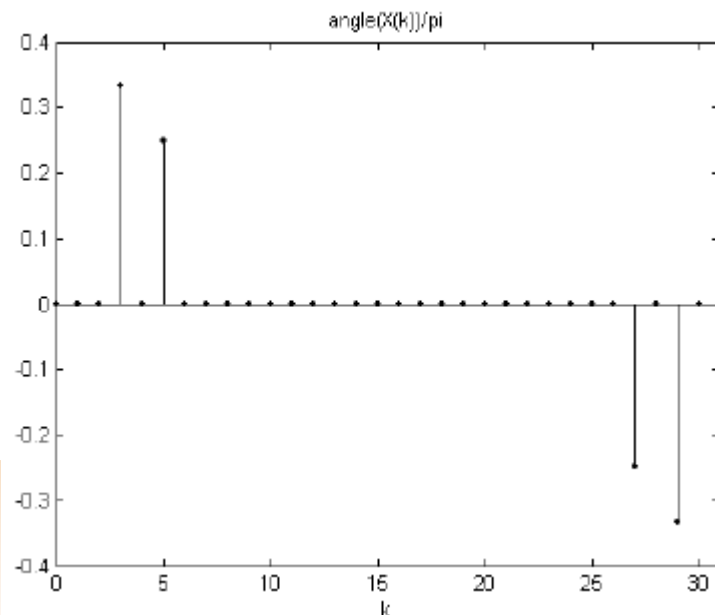
$$X(k) = 16e^{j\frac{\pi}{3}}\delta(k-3) + 16e^{-j\frac{\pi}{3}}\delta(k-29) + 8e^{j\frac{\pi}{4}}\delta(k-5) + 8e^{-j\frac{\pi}{4}}\delta(k-27), 0 \leq k \leq N-1$$

相位谱：

$$\angle X(k) = \begin{cases} \frac{\pi}{3} & k=3 \\ -\frac{\pi}{3} & k=29 \\ \frac{\pi}{4} & k=5 \\ -\frac{\pi}{4} & k=27 \\ 0 & \text{others} \end{cases}$$

2.3 频域分析和谱图表示.....

因此信号的**相位谱**如下图所示，纵坐标表示相位角除以 π 的大小，由相位谱可以看出信号只在 $k=3, 5, 27, 29$ 有值，它代表的含义是信号所包含的各个复指数频率分量的初相位，例如 $k=5$ 表示信号的复指数频率分量为 $5\pi/16$ 的初相位为 $\pi/4$ 。这些和信号的相位信息相符合，但是没有给出该信号的幅度信息。由于**相位谱的奇对称性**，往往只画出一半即可以得到另外一半的图形。



2.3 频域分析和谱图表示.....

● 功率谱

信号 $x(n)$ 的离散傅里叶变换 $X(k)$ 一般是一个复数， $X(k)$ 与其共轭 $X^*(k)$ 之积称为自功率谱，简称自谱或功率谱。其他文献多叫功率谱密度（函数），其表示：

$$P(k) = \frac{1}{N} X(k) X^*(k) = \frac{1}{N} |X(k)|^2, 0 \leq k \leq N-1$$

系数 $1/N$ 是为了满足式能量定理而进行的调整。反映的是信号的功率密度，在**图形上与幅度谱**类似，只是大小不同，**功率谱不含相位信息**，所以由功率谱不能恢复原始信号，因为存在多义性。

2.3 频域分析和谱图表示.....

可以证明:线性自相关函数和功率谱是一对离散时间傅立叶变换对 (DTFT), 相应的循环自相关函数和功率谱是一对离散傅立叶变换对 (DFT), 考虑序列 $x(n)$ 可能是复数, 由于实际得到的 $x(n)$ 是一段样本序列, 其循环自相关定义式如下:

$$R_{xx}(m) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n)x^*((n+m))_N R_N(n)$$

$$\begin{aligned} DFT[R_{xx}(m)] &= DFT\left[\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n)x^*((n+m))_N R_N(n)\right] \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left[\sum_{m=0}^{N-1} x(n)x^*((n+m))_N R_N(n)\right] W_N^{mk} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \sum_{m=0}^{N-1} x^*((n+m))_N R_N(n) W_N^{mk} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) DFS[x^*((n+m))_N] R_N(k) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) [W_N^{-nk} X((k))_N]^* R_N(k) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk} X^*(k) = \frac{1}{N} X(k) X^*(k) = P(k) \end{aligned}$$

2.3 频域分析和谱图表示.....

功率谱是正、实序列。当是实序列时，自相关序列也是实序列，则功率谱是偶对称的。从功率谱和自相关函数之间的关系，我们知道功率谱蕴涵着集合统计的实质，一个随机信号的自相关和功率谱都表达了随机信号的统计平均特性。

同样，可以给出两个信号之间的互功率谱的定义：

$$P_{xy}(k) = \frac{1}{N} X^*(k)Y(k), 0 \leq k \leq N-1$$

2.3 频域分析和谱图表示.....

【例2-8】画出例题2-6的功率谱并解释该图

解：由例题2-6知：

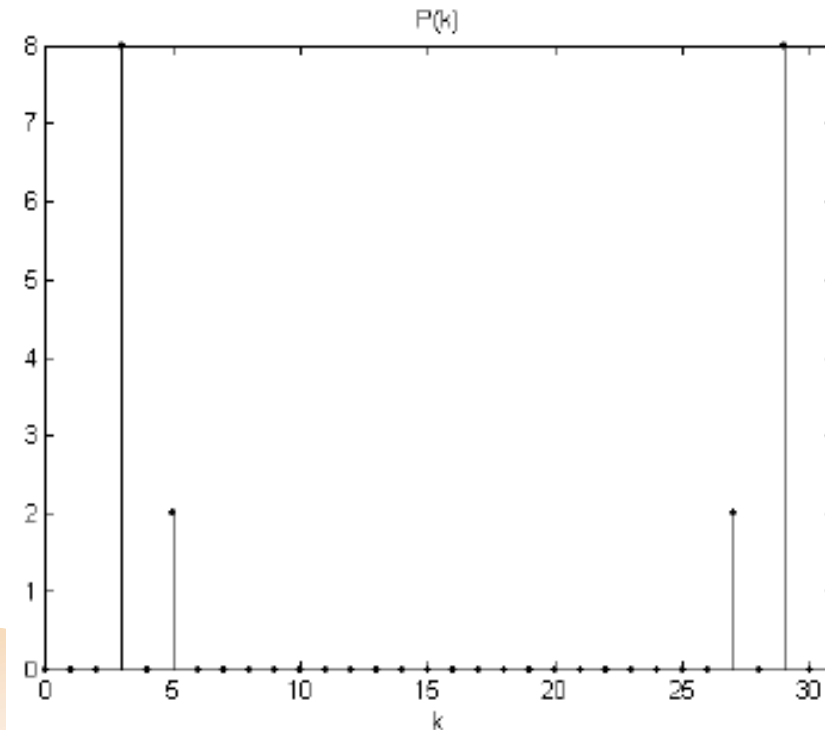
$$|X(k)| = \begin{cases} 16 & k = 3, \text{ or } k = 29 \\ 8 & k = 5, \text{ or } k = 27 \\ 0 & \text{others} \end{cases}$$

$$\because P(k) = \frac{1}{N} X(k) X^*(k) = \frac{1}{N} |X(k)|^2, 0 \leq k \leq N-1$$

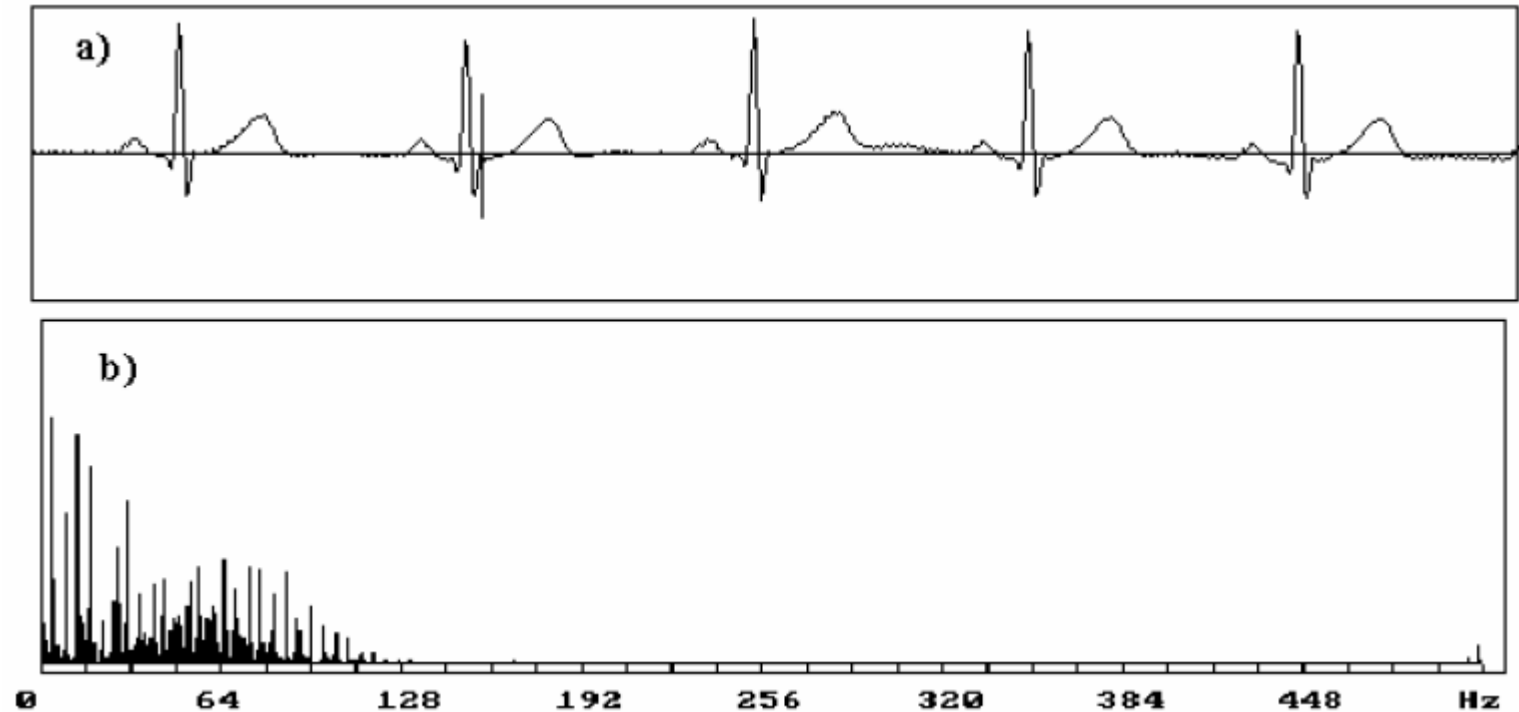
$$\therefore P(k) = \frac{1}{32} |X(k)|^2 = \begin{cases} 8 & k = 3, \text{ or } k = 29 \\ 2 & k = 5, \text{ or } k = 27 \\ 0 & \text{others} \end{cases}$$

2.3 频域分析和谱图表示.....

因此功率谱如下图所示，该图表示信号各复指数频率分量的功率，波形与幅度谱类似，大小略有不同，也没有包含相位信息。



2.3 频域分析和谱图表示



(a)心电信号 (b)功率谱

2.4 频域分辨率.....

离散傅里叶变换在采样和截断过程中会引起**混叠**、**泄露**、**栅栏**现象等。

(1) 采样频率比信号最高频率的2倍小，即 $f_s < 2F_h$ ，发生**混叠**现象。

(2) 对连续信号加窗函数，引起**泄漏**现象。可以通过加**不同的窗函数**来截取信号，以便减少泄漏。

(3) 离散傅里叶变换只给出频谱在离散点 ($\omega_k = 2\pi k/N$) 上的值，无法反应这些点之间的频谱内容，即**栅栏**现象。通过**补零**可以改善栅栏现象。

窗函数主要有：矩形窗，三角窗，巴特利特窗，广义余弦窗，汉宁窗，海明窗，布莱克曼窗，凯瑟窗和切比雪夫窗等

2.4 频域分辨率.....

在时域中，数字信号的时间分辨率由采样间隔时间 Δt 决定，频域分辨率 Δf 由采样频率 f_s 和采样点 N 决定：

$$\Delta f = \frac{f_s}{N}$$

式中， f_s 由采样定理决定，因此提高频率分辨率，就得增加采样点数 N 。如果从数据尾部填0，称为**高密度频谱 (The High Density Spectrum)**。填入适当的现有数据，称为**高分辨率频谱 (The High Resolution Spectrum)**。

2.4 频域分辨率.....

【例2-9】 高密度频谱和高分辨率频谱的比较。设信号为：

$$x(n) = \cos(0.48\pi n) + \cos(0.52\pi n)$$

利用有限长序列的FFT来分析下列情况的幅度谱：

- (1) 采集数据长度 $N=10$ ，即 $0 \leq n \leq 9$ ，做10点的DFT，画出幅度谱。
- (2) 采集数据长度 $N=10$ ，但补90个0，做100点的DFT，画出幅度谱。
- (3) 采集数据长度 $N=100$ ，做100点的DFT，画出幅度谱。

2.4 频域分辨率.....

编程如下:

```
N1=10;%第(1)问  
N2=10;%第(2)问  
N3=100;%第(3)问
```

% 做10点的DFT

```
for i=1:N1  
    x_1(i)=cos(0.48*pi*i)+cos(0.52*pi*i);  
end  
subplot(3,2,1),stem(0:N1-1,x_1);  
title('x(n),0<=n<=9')  
f_1=fft(x_1,10);  
subplot(3,2,2),stem(0:(2/N1):1,abs(f_1(1:N1/2+1)));  
title('DFT Magnitude')  
xlabel('frequency in  $\pi$  units')
```

% 做100点的DFT, 其中90个点补零

```
for j=1:N2  
    x_2(j)=cos(0.48*pi*j)+cos(0.52*pi*j);  
end
```

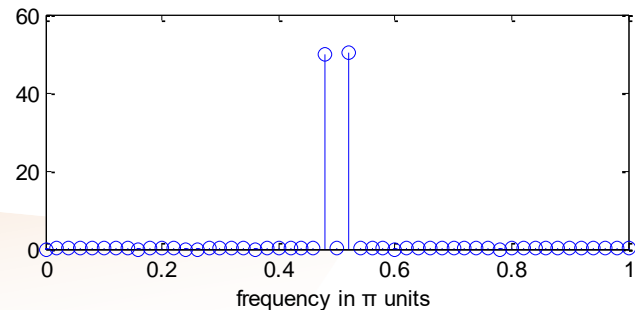
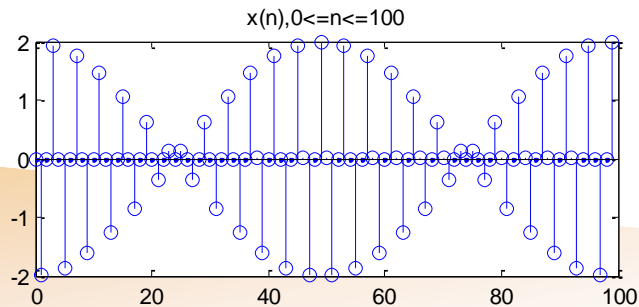
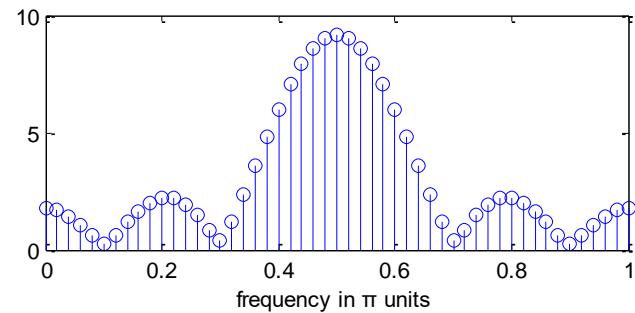
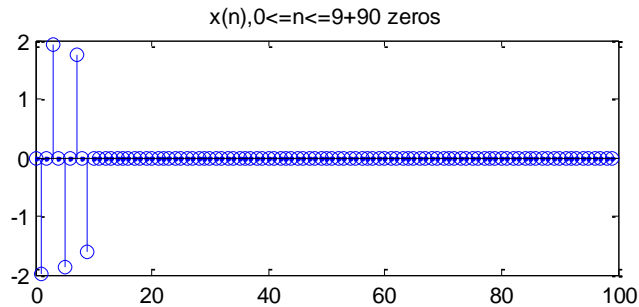
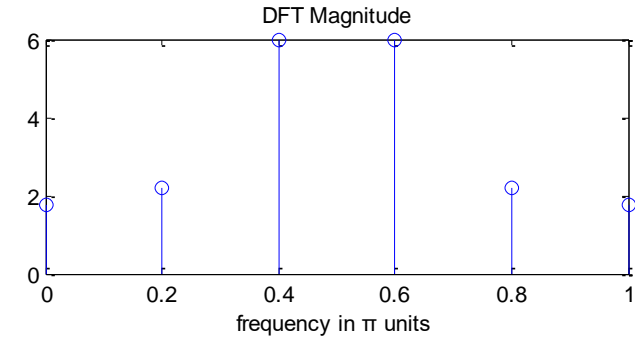
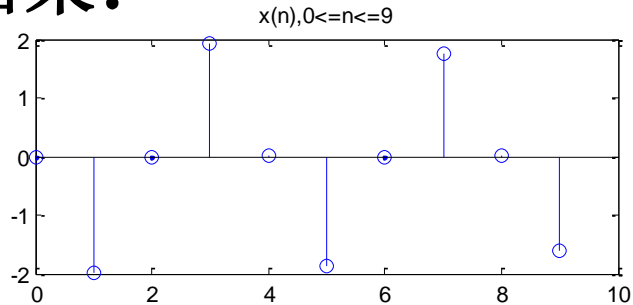
```
for j=N2+1:N3  
    x_2(j)=0;  
end  
subplot(3,2,3),stem(0:N3-1,x_2);  
title('x(n),0<=n<=9+90 zeros')  
f_2=fft(x_2,100);  
subplot(3,2,4),stem(0:(2/N3):1,abs(f_2(1:N3/2+1)));  
xlabel('frequency in  $\pi$  units')
```

% 做100点的DFT

```
for k=1:N3  
    x_3(k)=cos(0.48*pi*k)+cos(0.52*pi*k);  
end  
subplot(3,2,5),stem(0:N3-1,x_3);  
title('x(n),0<=n<=100')  
f_3=fft(x_3,100);  
subplot(3,2,6),stem(0:(2/N3):1,abs(f_3(1:N3/2+1)));  
xlabel('frequency in  $\pi$  units')
```

2.4 频域分辨率.....

运行结果:



2.4 频域分辨率.....

通过上面实例，利用FFT做谱分析时个参数的选择如下：

- 1、采样频率应满足采样定理（奈奎斯特定理）

$$f_s \geq 2F_h$$

或者：

$$T \leq 1/2F_h$$

- 2、离散傅里叶变换的点长 N 为：

$$N = \frac{f_s}{\Delta f} \geq \frac{2F_h}{\Delta f}$$

注：N的取值一般为2的幂次，可以加速FFT计算速度！

- 3、采集信号的持续时间：

$$t_p = NT$$

2.4 频域分辨率.....

【例2-10】 已知一连续信号为：

$$x(t)=\cos(2\pi\times 1.25\times 10^3t)+0.5\cos(2\pi\times 1\times 10^3t)+0.25\cos(2\pi\times 0.8\times 10^3t)$$

使用**DFT**计算其幅度值，并且与原信号进行比较。

解：首先确定周期，第一部分周期为0.8ms，第二部分周期为1ms，第三部分周期为1.25ms，因此整个信号的周期为20ms，因此采样持续时间最好为20ms的整数倍，可以取 $t_p=20\text{ms}$ 。信号的最高频率为 $F_h=1.25\times 10^3\text{Hz}$ ，因此采样频率或采样间隔为：

$$f_s\geq 2F_h=2.5\times 10^3\text{Hz}, T\leq 1/2F_h=0.4\text{ms}$$

取采样频率和采样时间分别为：

$$f_s=5\times 10^3\text{Hz}, T=0.2\text{ms}$$

2.4 频域分辨率.....

DFT的点长 N 从持续时间中算得:

$$N=t_p/T=20\text{ms}/0.2\text{ms}=100$$

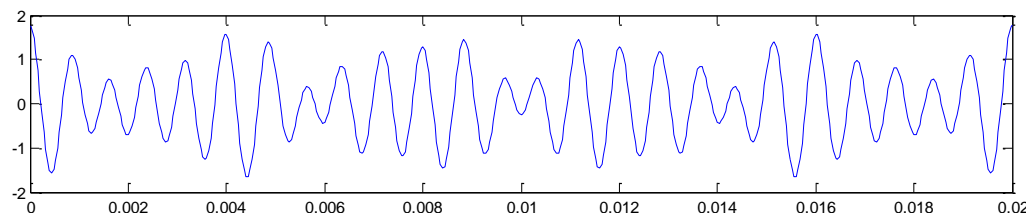
令 $t=nT$, $n=0,1,2,\dots,99$, 代入原信号进行采样, 新的离散信号 $x(n)=\cos(0.5\pi n)+0.5\cos(0.4\pi n)+0.25\cos(0.32\pi n)$, 然后利用FFT计算100点的DFT。

程序代码:

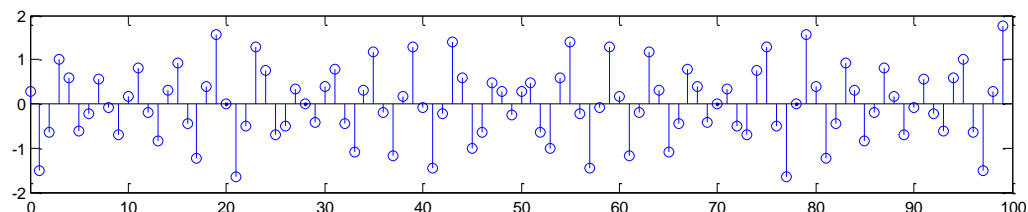
```
n=0:99;
for i=1:length(n)
    x_1(i)=cos(0.5*pi*i)+0.5*cos(0.4*pi*i)+0.25*cos(0.32*pi*i);
end
%连续数据图
subplot(3,1,1),fplot('cos(2*pi*1.25*10^3*t)+0.5*cos(2*pi*1*10^3*t)+0.25*cos(2*pi*0.8*10^3*t)',[0 0.02])
%离散数据图
subplot(3,1,2),stem(n,x_1)
h=fft(x_1,100);
%幅度谱图
subplot(3,1,3),stem(n,abs(h))
```

2.4 频域分辨率.....

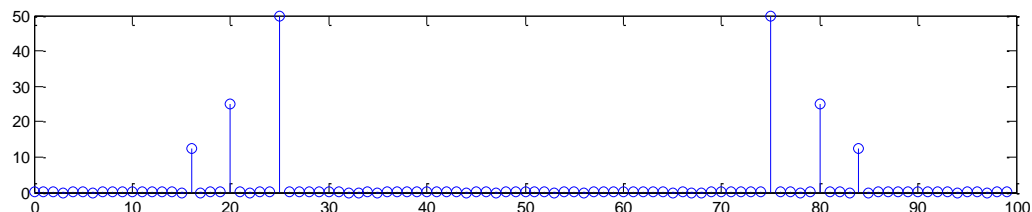
结果图:



→ 连续函数图



→ 离散函数图



→ 幅值图

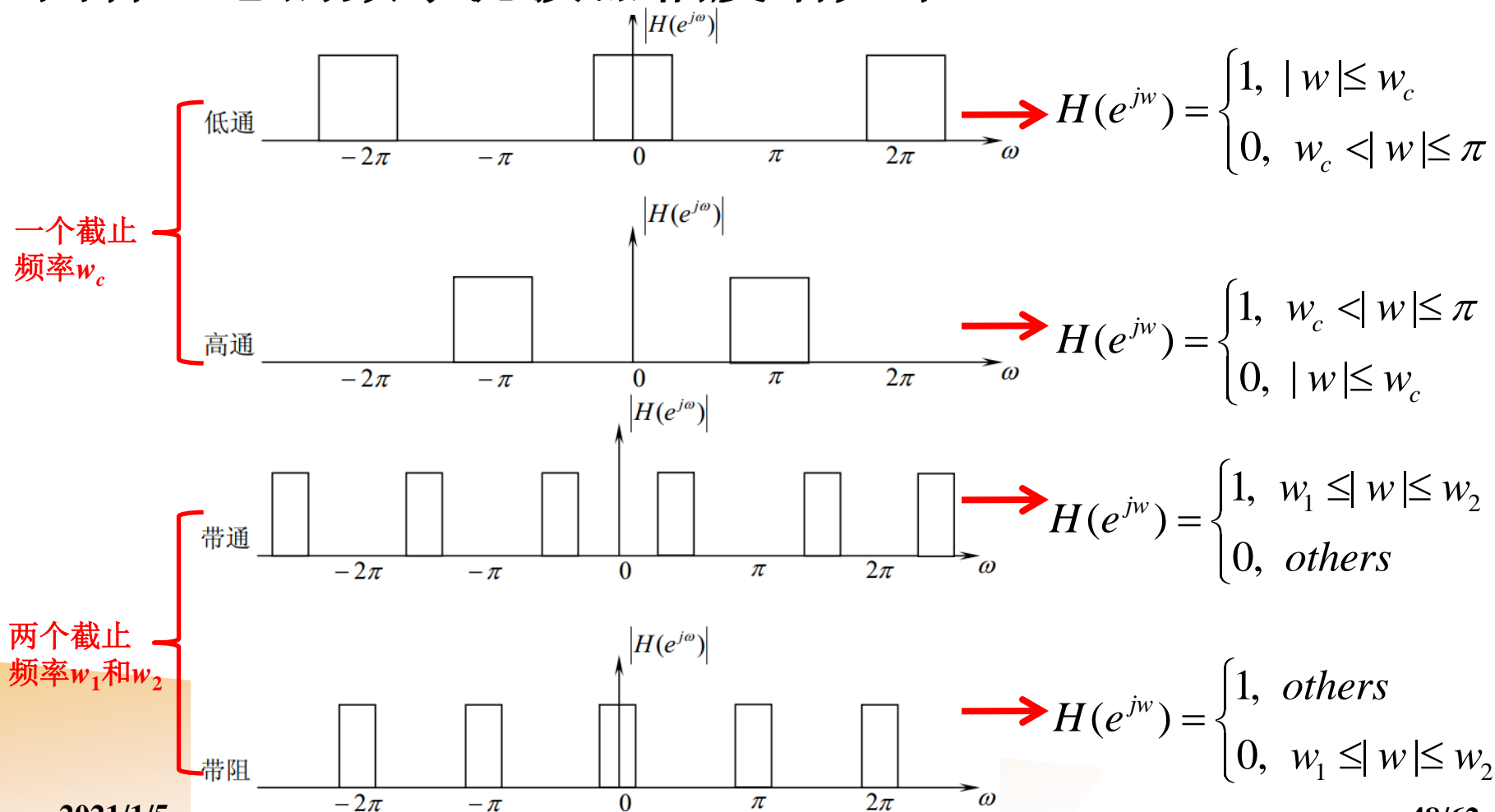
上图可知：信号的频率包含 $k=16,20,25$ ，即包含的数字频率成分为：

$$w_{16}=2\pi/100*16=0.32\pi, \quad w_{20}=2\pi/100*20=0.4\pi, \quad w_{25}=2\pi/100*25=0.5\pi$$

$$\text{对应的模拟频率: } f_{16}=w_{16}/2\pi*f_s=0.8\text{kHz}, \quad f_{20}=1\text{kHz}, \quad f_{25}=1.25\text{kHz}$$

2.5 数字滤波器的设计和实现.....

四种理想的数字滤波器幅度谱如下：



2.5 数字滤波器的设计和实现.....

数字频域滤波器大致分为IIR滤波器和FIR滤波器。

IIR (Infinite Impulse Response) : 无限长脉冲响应滤波器，或称递归滤波器。

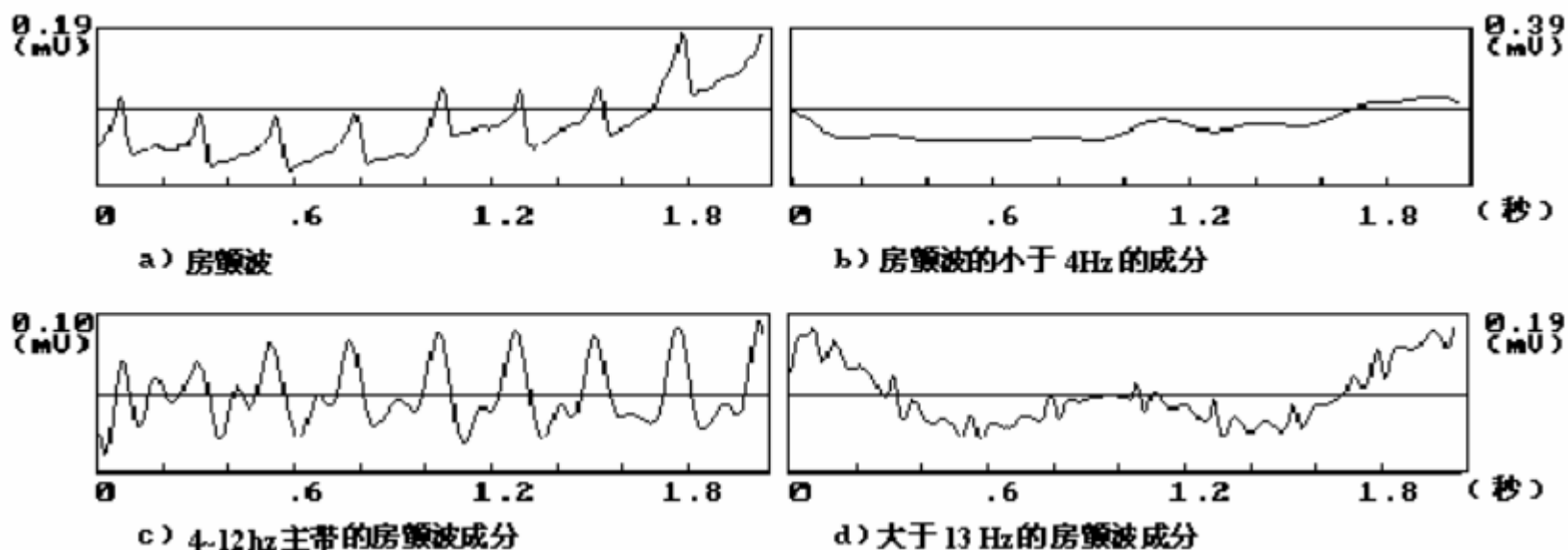
FIR (Finite Impulse Response) : 有限长脉冲响应滤波器。

IIR特点: 有反馈回路，可在相同阶数时取得更好的滤波效果，但是IIR滤波器设计无法控制滤波器的相位特性。

FIR特点: 没有反馈回路，不存在不稳定的问题，幅度特性随意设置的同时，保证精确的线性相位。

2.5 数字滤波器的设计和实现.....

先**FFT**，然后将滤波的频段对应的**幅度设为0**，最后**IFFT**即可得到滤波后的时域波形。下图是房颤波滤波的例子。

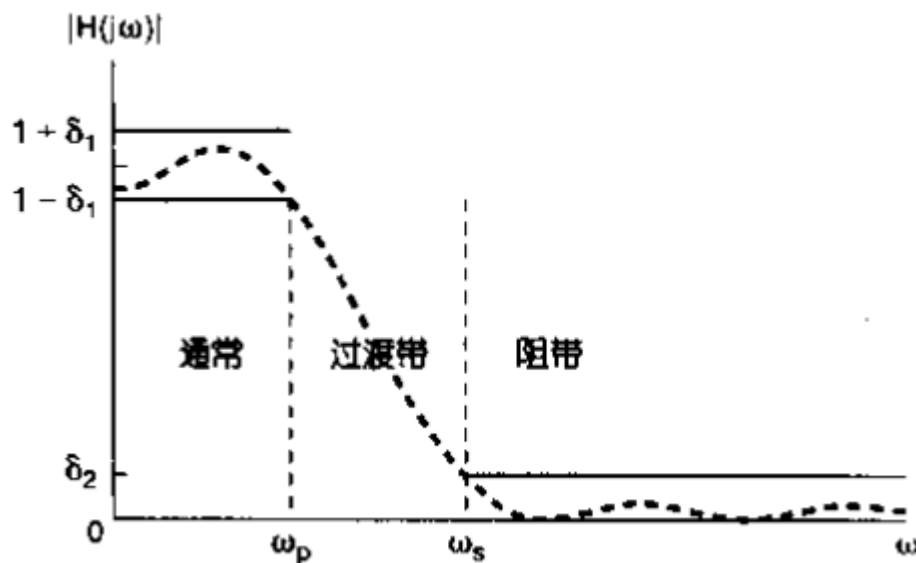


2.5 数字滤波器的设计和实现.....

【例2-11】选择一种合适的窗设计一个FIR数字低通滤波器，满足下列要求：

$$\omega_p = 0.2\pi, A_p = 0.25\text{dB}, \omega_s = 0.3\pi, A_s = 50\text{dB}$$

并画出滤波器的单位脉冲响应和该滤波器的幅度响应。



2.5 数字滤波器的设计和实现.....

MATLAB程序:

```
wp=0.2*pi;ws=0.3*pi;%给出通带频率和阻带频率  
tr_width=ws-wp;%求过渡带宽度  
%As=50dB,hamming window可以满足该条件,查表求得窗长度  
M=ceil(6.6*pi/tr_width);%取整  
n=[0:M-1];  
wc=(ws+wp)/2;%求截止频率
```

设置滤波器参数

滤波器脉冲响应和频率响应

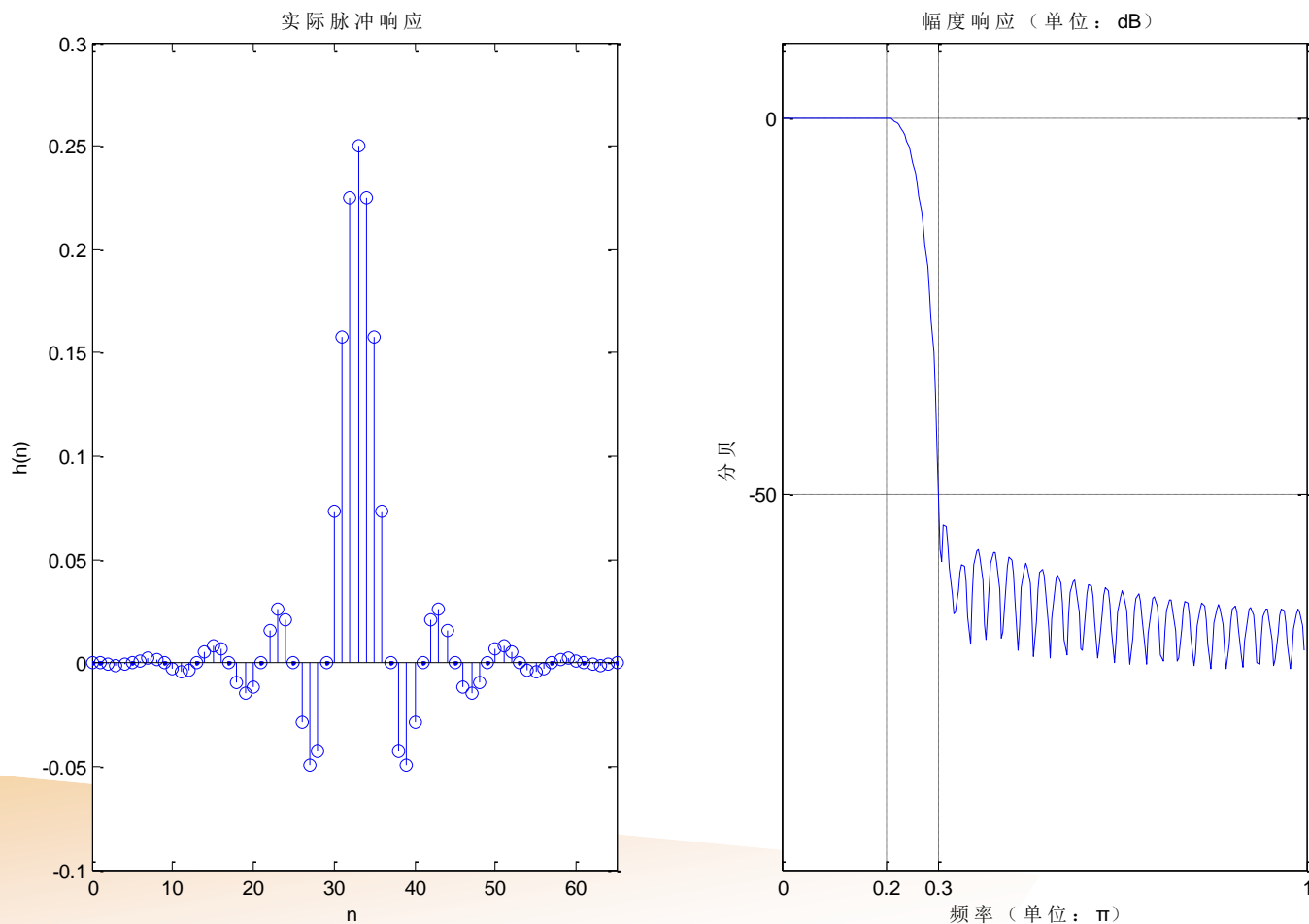
```
b=fir1(M,wc/pi);%求FIR低通滤波器的系数,默认就是hamming window  
h=b(1:end-1);  
[hh w]=freqz(h,[1],'whole');%求滤波器的频率响应  
hhh=hh(1:256);ww=w(1:256);%由于对称性,画一半图即可,默认整个周期点数为512个  
%画图
```

```
subplot(1,2,1),stem(n,h);title('实际脉冲响应')  
axis([0 M-1 -0.1 0.3]);xlabel('n');ylabel('h(n)');  
subplot(1,2,2),plot(ww/pi,20*log10(abs(hhh)));title('幅度响应 (单位: dB)');grid  
axis([0 1 -100 10]);xlabel('频率 (单位:  $\pi$ )');ylabel('分贝');  
set(gca,'XTickMode','manual','XTick',[0 0.2 0.3 1]);  
set(gca,'YTickMode','manual','YTick',[-50 0]);
```

响应图

2.5 数字滤波器的设计和实现.....

执行结果:



2.5 数字滤波器的设计和实现.....

【例2-12】 使用平滑滤波器（中值滤波器）可以起到平滑数据以抑制噪声的目的，假设有1000点的数据 $x=-10+5*\text{randn}(1,1000)$ ，用不同长度的数据点进行平滑，观察滤波的效果。

解：Matlab代码：

```
x=-10+5*randn(1,1000);  
n=0:999;  
y1=medfilt1(x,15);  
y2=medfilt1(x,30);  
y3=medfilt1(x,45);
```

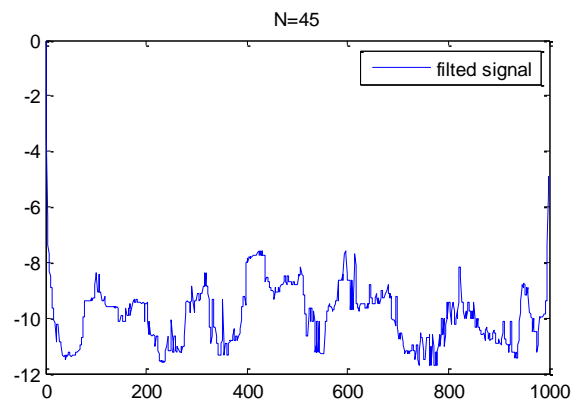
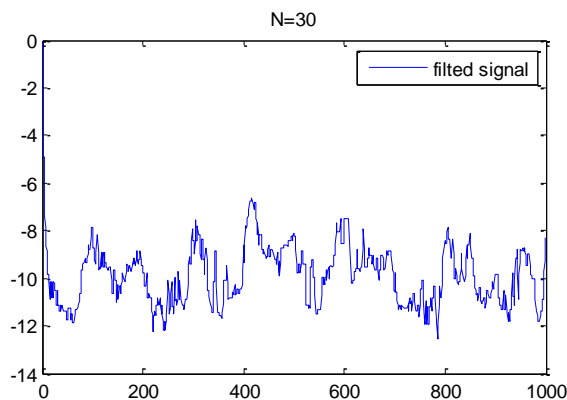
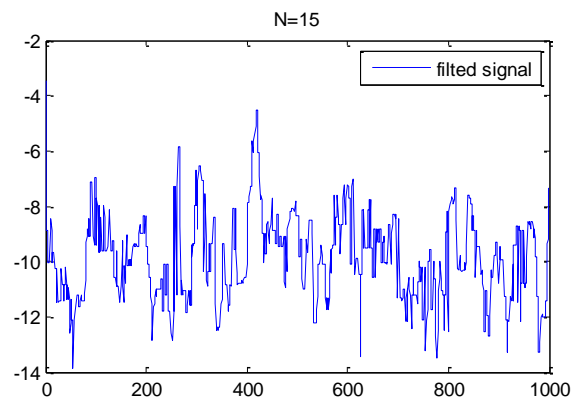
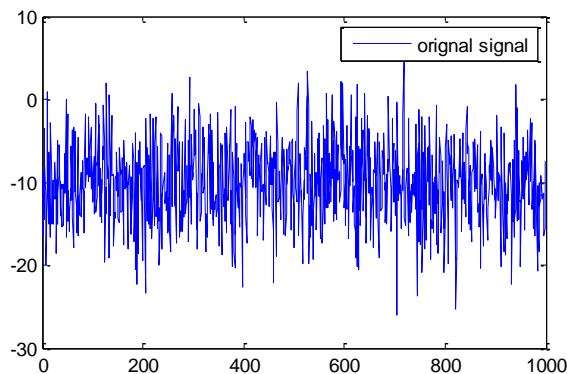
→ 产生原始信号和中值滤波平滑信号

```
subplot(2,2,1);plot(n,x);legend('original signal');  
subplot(2,2,2);plot(n,y1);title('N=15');legend('filted signal');  
subplot(2,2,3);plot(n,y2);title('N=30');legend('filted signal');  
subplot(2,2,4);plot(n,y3);title('N=45');legend('filted signal');
```

→ 原始信号和滤波之后的信号显示

2.5 数字滤波器的设计和实现.....

执行结果:



结论: N 越大, 曲线越平滑!

2.5 数字滤波器的设计和实现

Matlab中有多个滤波器设计和实现的函数，例如：

FIR滤波器的设计： fir1, fir2, firls, remez, fircls, fircls1, firrcos, sgolay等

IIR滤波器的设计： butter, cheby1, cheby2, ellip, yulewalk等

滤波实现： filter, medfilt1, filtfilt, freqz, freqs, latcfilt等

具体用法可以**help 滤波器函数！**

本章小结

- 1、掌握：离散傅立叶变换；
- 2、熟悉：频域分析和谱图表示；
- 3、了解：傅立叶变换的意义和数字滤波器的设计。

本章习题

- 1、FIR滤波器和IIR滤波器的主要区别是什么？
- 2、已知以下 $X(k)$,求IDFT[$X(k)$],其中 m 为某一正整数, $0 < m < N/2$.

$$(1) X(k) = \begin{cases} \frac{N}{2} e^{j\theta}, & k = m \\ \frac{N}{2} e^{-j\theta}, & k = N - m \\ 0, & \text{其他}k \end{cases}$$

$$(2) X(k) = \begin{cases} -\frac{N}{2} j e^{j\theta}, & k = m \\ \frac{N}{2} j e^{-j\theta}, & k = N - m \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

本章习题

3、试计算常用信号 $\sin(\frac{4\pi}{N}n)R_N(n)$ 的 N 点DFT。

4、有限长为 $N=100$ 的两序列

$$x(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq 10 \\ 0, & 11 \leq n \leq 99 \end{cases}, y(n) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & 1 \leq n \leq 89 \\ 1, & 90 \leq n \leq 99 \end{cases}$$

作出 $x(n), y(n)$ 示意图,并求循环卷积 $f(n)=x(n) \oplus y(n)$ 并作图。

本章习题

5、 $x(n)$ 为长为 N 有限长序列， $x_e(n)$ ， $x_o(n)$ 分别为 $x(n)$ 的周期共轭偶部及奇部，也即：

$$x_e(n) = x_e^*(N-n) = \frac{1}{2}[x(n) + x^*(N-n)]$$

$$x_o(n) = -x_o^*(N-n) = \frac{1}{2}[x(n) - x^*(N-n)]$$

证明： $DFT[x_e(n)] = Re[X(k)]$ ， $DFT[x_o(n)] = j Im[X(k)]$

本章习题

6、已知心电图的频率上限约为50Hz，采集数据时的采样频率至少为多少？如果采样频率为300Hz，要求的频率分辨率为1Hz，试确定作谱估计时每段数据的点数。

下集预告

第三章 随机信号表示法